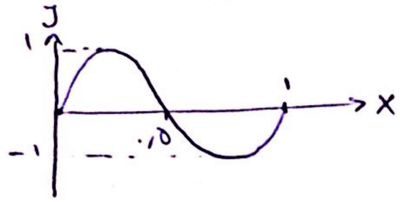
«محاسبات عددی»

خطای برشی: خطای ناشی از تبدیل مجموعه‌ای نامتناهی یا تابع پیوسته به مجموعه‌ای متناهی و تابعی گسسته.

خطای ناشی از گرد کردن: ناشی از نمایش محدود اعداد حقیقی و عملیات روی آن ها.

- چگونه $y = \sin(2\pi x)$ رسم شود؟

```
n = 1000;
x = linspace(0,1,n);
y = zeros(1,n);
for k=1:n
    y(k) = sin(2*pi*x(k))
end
```



نمایش اعداد حقیقی:

$$F \equiv F(\beta, t, L, U)$$

$x \neq 0 \Rightarrow 1 \leq d_1 \leq \beta - 1 \quad , \quad 0 \leq d_i \leq \beta - 1 \ , \ i = 2, \dots, t$

$x = 0 \Rightarrow (0/000\dots0)\,\beta^0$

$$\pm \overbrace{(\cdot d_1 \dots d_t)}^{\text{مانتیس عدد}} \beta^{e} \leftarrow \text{نمای عدد} \qquad L \leq e \leq U$$

* هرچه عدد مقیاس بزرگتری داشته باشد، فاصله اعداد قابل نمایش بیشتر می شود.

$$\text{تعداد کل اعداد قابل نمایش} = \underbrace{\underset{\ominus\oplus}{2}\,(\beta+1)\,\beta^{t-1}}_{\text{مانتیس ها}}\ \underbrace{(U-L+1)}_{\text{نما ها}} + \overset{\text{صفر}}{1}$$

* اگر عددی در بازه سرریز و زیرریز نمایش نباشد می توان آن را در این سیستم نشان داد حتی اگر بطور دقیق قابل نمایش نباشد با تقریب آن را نشان می دهیم.

$$\text{خطای مطلق} \Rightarrow |fl(x) - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-t}$$

$$\text{خطای نسبی} = \frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2}\beta^{e-t}}{(0/1000\dots0)\,\beta^{e}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

* اصطلاحاً $\frac{1}{2}\beta^{1-t}$ را روند عددی می نامند.

* عملیات اصلی $+$ و $/$ و $\times$ و $-$ با دقت ماشین بدست می آیند. (زیرا رجیسترهای cpu تعداد بیت بیشتری ذخیره می کنند.)

$$\frac{|fl(a\ op\ b) - (a\ op\ b)|}{(a\ op\ b)} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

* برای اعداد نزدیک صفر نزدیکی با خطای مطلق سنجیده می شود و برای اعداد دور از صفر نزدیکی با خطای نسبی سنجیده می شود.

(مثل روند عددی، خطای نسبی کاربر)

ترکیب دو خطا:

$|x - \bar{x}|$ [illegible] $|x|$

خطای مطلق در نزدیکی به صفر قابل قبول

— با فرض گرد کردن اعداد $\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq eps$ ، $eps = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$. بطور معادل

$$\frac{fl(x)-x}{x} = \delta \ , \ |\delta| \leq eps$$

$$\longrightarrow fl(x) = x + \delta x = x(1+\delta) \ , \ |\delta| \leq eps$$

اگر $\bar{x} \neq 0$ تخمین برای $x=0$ باشد و داشته باشیم : $\left|\frac{\bar{x}-x}{x}\right| \leq 10^{-p} = \delta_1$ آنگاه تقریباً p یا $(p+1)$ رقم یکسان

x و $\bar{x}$ در مانتیس (نرمال شده) وجود دارند.

— x و $\bar{x}$ نزدیک صفر: $|\bar{x}-x| \leq 10^{-q} = \delta_2$ ، آنگاه x و $\bar{x}$ هر دو تقریباً برابر 10^{-q} و نزدیک صفر هستند.

ترکیب دو خطای نسبی و مطلق ، $|\bar{x}-x| \leq \delta_2 + \delta_1|x|$

خطای برشی ناشی از سری تیلور و ترکیب آن با خطاهای محاسباتی :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{h^2}{2}f''(\eta) \quad , h>0 \ , \ \eta \in [a, a+h]$$

$$\longrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2}f''(\eta)$$

تخمین برای $f'(a)$: $D(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

خطای برشی برای $D(h)$ $= |D(h) - f'(a)| = \frac{h}{2}|f''(x)| \leq \frac{h}{2}M_2 \ , \ M_2 = \max|f''(x)| \ , x \in [a, a+h]$

مقدار محاسبه شده توسط ماشین بجای $D(h)$: $\bar{D}(h) = \dfrac{f(a+h)+\delta_1-(f(a)+\delta_2)}{h}$ ، $|\delta_1| \ , \ |\delta_2| \leq \delta =$ کران بالای خطا در محاسبه f در هر نقطه

جمع قدر مطلق خطای ایجاد شده از خطای برشی و محاسباتی $= E(h) \leq \frac{h}{2}M_2 +$ کران برای قدر مطلق خطای محاسباتی

کران برای قدر مطلق خطای محاسباتی : $D(h) - \bar{D}(h) = \left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - \dfrac{f(a+h)+\delta_1-f(a)-\delta_2}{h}\right| =$

$$\frac{|-\delta_1+\delta_2|}{h} \leq \frac{|\delta_1|+|\delta_2|}{h} \leq \frac{2\delta}{h} \Rightarrow \boxed{E(h) = \underbrace{\frac{h}{2}M_2 + \frac{2\delta}{h}}_{P(h)}}$$

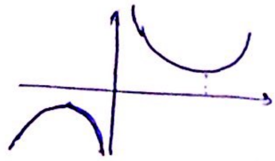
سوال: h چقدر باشد تا خطا کمینه شود؟ ← مشتق گیری :

$$P'(h) = 0 \Rightarrow \frac{M_2}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{h^2 M_2}{2} - 2\delta = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4\delta}{M_2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4\delta}{M_2}} \Rightarrow \boxed{h = 2\sqrt{\delta/M_2}}$$

$$q(h) = \frac{h}{2} M_2 + \frac{2\delta}{h}$$

ادامه بحث جلسه پیش :



$$q'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0 \longrightarrow h_{opt} = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$$

$$q''(h) = \frac{4\delta}{h^3} > 0$$

* با این انتخاب کران بالای خطا کمینه می‌شود .

برنامه‌ای با ۴ پارامتر fname , a, delta, M2 تنظیم می‌شود .

که دو پارامتر که کاربر آن ها را وارد می‌کند واگر نکند ، برنامه از پیش فرض استفاده می‌کند.

```
function d = Derivative (fname, a, delta, M2)
if nargin <=3      M2 = 10      end
if nargin == 2     delta = eps  end
hopt = 2 * sqrt(delta/M2);
d = (feval(fname, a+hopt) - feval(fname, a)) /hopt;
```

nargin ⟶ تعداد پارامترهای از تابع که کاربر وارد کرده است .

feval ⟶ محاسبه تابع در نقطه ی خاص

برای فراخوانی تابع ، باید ابتدا تابع مورد نظر تعریف شود و نام آن ، همراه نقطه برای تقریب مشتق به d ارسال شود.

تابع $f(x) = \sin 10x$ را در نظر بگیرید.

```
Function t = sin10(x);
   t = sin(10*x);
```

در m فایل ذخیره شود .

```
d = derivative ('sin10', 1, eps, 100)
```

تخمین مشتق $\sin 10x$ در $x=1$ مدنظر است.

محاسبه e^x : (بسط تیلور)

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

```
Function y = myexp2(x)
y = ones(size(x));   term = ones(size(x)) ...
```

برای حل می‌کنیم

حل نقطه‌ای :

```
k = 0;    y = 1;    term = 1;
while abs(term) > esp * abs(y)
     k = k+1;    term = term * x/k;    y = y+term;
end
```

محاسبه زمان اجرای برنامه:

$tstart = clock;$ ~~~ ~~~ ~ $tfinish = clock;$

$t_1 = etime(tfinish, tstart)$ زمان = سال : ماه : روز : ساعت : دقیقه : ثانیه
(دقت هزارم ثانیه)

درون یابی (interpolation):

(x_i, y_i) داده شده اند، می خواهیم $p(x)$ چند جمله ای از درجه کوچکتر یا مساوی با $n-1$ بیابیم به طوری که $i=1,2,\dots,n$ ، $p(x_i)=y_i$

نمایش چند جمله ای $p(x)$ وابسته به توابع پایه انتخاب شده است.

توابع پایه: $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

$$P(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$$

$$P(x_i) = a_1 + a_2 x_i + \dots + a_n x_i^{n-1} = y_i \qquad \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

توابع پایه: $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$

$$P(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

$$P(x_i) = a_1\phi_1(x_i) + a_2\phi_2(x_i) + \dots + a_n\phi_n(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

محاسبه V:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

```
Function a = InterV (x,y)
  n = length (x) ;
  V (:,1) = ones (n,1);
  for j = 2:n
      V(:,j) = X1 * V(:,j-1);
  end
```

: $a = V \backslash y$ ← حل دستگاه به $\frac{1}{3}n^3 + an^2$ عملیات اصلی نیاز دارد.

$$P(z) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_2)x + a_1$$

نمایش P با توابع پایه لاگرانژ:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \longrightarrow$$ دستگاه درون یاب جواب صریح دارد.

$$\begin{array}{cccccc} l_1(x) & l_2(x) & & & & l_n(x) \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} a_i = y_i \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

$$P_{(x)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, l_i(x) \longrightarrow$$ دقیقاً همان چندجمله‌ای قبلی با عبارتی دیگر

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

توابع پایه نیوتون :

$$1,\ x - x_1,\ (x-x_1)(x-x_2),\ \dots,\ (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

دستگاه درون

$$\begin{array}{cccc} 1 & (x-x_1) & \cdots & \prod_{j=1}^{n-1}(x-x_j) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2-x_1)(x_2-x_2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & & & & 0 \\ 1 & (x_n - x_1) & (x_n-x_1)(x_n-x_2) & \cdots & \prod_{j=1}^{n-1}(x-x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

پایین مثلثی که با حذف پیشرو حل شود

روش حل

$a_1 = y_1$

حذف a_1: ستون‌های زیر درایه (۱،۱) را صفر کنیم.

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & & \prod_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}$$

$$y_{i1} = y_i - y_1 \qquad i = 2, \dots, n$$

سطر iام را به $x_i - x_1$ تقسیم کنید. $(i = 2, \dots, n)$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ 0 & 1 & x_3 - x_2 & \\ & \vdots & & \\ & 1 & x_n - x_2 & \prod_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y'_{21} \\ \vdots \\ y'_{n1} \end{bmatrix} \qquad y'_{i1} = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1}, \quad i = 2, \dots, n$$

```
function c = InterpNRecur(x, y)
  n = length(x);    c = zeros(n,1);
  c(1) = y(1);
  if n>1
  c(2:n) = InterpNRecur( x(2:n), (y(2:n) - y(1))/(x(2:n) - x(1))
  end
```

$$q_{(x)} = a_2 + a_3(x - x_1) + \dots + a_n(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$P_{(x)} = a_1 + (x - x_1)\, q_{(x)} \longrightarrow P_{(x)} = \dots$$

```
n = length(x);
    for k=1:n-1
        y(k+1:n) = (y(k+1:n) - y(k)) ./ (x(k+1:n) - x(k))
    end
```

* محاسبه چندجمله‌ای نیوتن از روش هورنر: $P_{n-1}(x) = ((\cdots c_n(x-x_{n-1}) + c_{n-1})(x-x_{n-2}) + \cdots + c_2)(x-x_1) + c_1$

خطای درون یابی: قضیه: فرض کنید (x_i, y_i)، $i=1,\dots,n$، x_i ها مجزا، با $y_i = f(x_i)$ داده شده است. f در بازه $I=[a,b]$ شامل x_i ها، n بار مشتق پذیر پیوسته است. $P_{n-1}(x)$ درون یاب از درجه کوچکتر یا مساوی با $n-1$ باشد. در این صورت داریم:

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{n}(\theta)}{n!}(x-x_1)\cdots(x-x_n), \quad \theta\in I$$

اثبات: $x = x_i \longrightarrow$ واضح است $f(x)-P_{n-1}(x)=0$

$i=1,\dots,n$, $\bar{x}\neq x_i \longrightarrow$ به تابع زیر توجه کنید

$$F(x) = f(x) - P_{n-1}(x) - CL(x), \quad L(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$C = \left(\frac{f(\bar x) - P_{n-1}(\bar x)}{L(\bar x)}\right)$$ C را به گونه‌ای می‌گیرید که $F(\bar x)$ صفر

بدین ترتیب $F(x)$، $n+1$ ریشه مجزا دارد $\Rightarrow$ $F'(x) \leftarrow n$ ریشه در I دارد $\Rightarrow \cdots \Rightarrow F^{(n)}(x) \leftarrow 1$ ریشه در I دارد.

$F^{(n)}(x)$ ریشه $\theta\in I$ است $\Rightarrow 0 = F^{(n)}(\theta) = f^{(n)}(\theta) - 0 - Cn!$ بنابراین $C = \frac{f^n(\theta)}{n!}$

$$0 = F(\bar x) = f(\bar x) - P_{n-1}(\bar x) - \frac{f^n(\theta)}{n!}\prod_{j=1}^{n}(\bar x - x_j), \quad \theta\in I$$

بنابراین خطای max در صورتی که فاصله x_i ها مساوی باشد بدست می‌آید:

$$\max_{x\in I}|f(x)-P_{n-1}(x)| \le \frac{M_n}{n!}\max_{x\in I}|(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \le \frac{h^n M_n}{4n}, \quad h=\frac{b-a}{n}$$

$$M_n = \max_{x\in I}|f^{(n)}(x)|$$

$(x_i, f(x_i))$, $i=1,\dots,n$

درون یابی با کسرهای تفاضلی نیوتن:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1,\dots,x_i]\prod_{j=1}^{n}(x-x_j) = \overset{c_1}{f[x_1]} + \overset{c_2}{f[x_1,x_2]}(x-x_1)+\cdots+\overset{c_n}{f[x_1,\dots,x_n]}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$$

$f[x_i] = f(x_i)$, $i=1,\dots,n$, $f[x_1,\dots,x_{i+1}] = \frac{f[x_1,\dots,x_i] - f[x_2,\dots,x_{i+1}]}{x_1 - x_{i+1}} = \frac{f[x_2,\dots,x_{i+1}]-f[x_1,\dots,x_i]}{x_{i+1}-x_1}$ $(i=1,\dots,n-1)$

جدول کسرهای تفاضلی نیوتن

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_1	$f[x_1] \to c_1$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2] \to c_2$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	[illegible] c_3	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	c_4 $f[x_1,x_2,x_3,x_4]$

ستون های جدید را می‌توان روی ستون قبلی نوشت و عملیات تفاضلی نیوتون را همواره روی f انجام داد و نهایتاً خواهیم داشت،

$$c_i = f(i) \ , \ i = 1, \dots n$$

* مقدار کسر تفاضلی به ترتیب نقاط داخل [ ] بستگی ندارد.

درون یابی وارون f :

$$(y_i , x_i) \ , \ i = 1, \dots, n \qquad \underset{j \neq i}{y_i \neq y_j}$$

$q(y)$ از درجه کوچکتر مساوی $n-1$ یکتا برای تابع یکنوا در فاصله $[a,b]$ با یک ریشه ؛ تقریب ریشه $= q(0)$

درون یابی MATLAB :

$$\text{Polyfit} \longleftarrow \begin{matrix} x & n\times 1 \\ y & n\times 1 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$a = \text{polyfit}(x, y, n) \Longrightarrow \begin{matrix} a(n) & \dots & a(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_1 & & c_n \end{matrix} \Rightarrow P_{n-1}(x) = a_n + a_{n-1}(x - x_1) + \dots$$

$$P\,\text{val} = \text{polyval}(a, x\,\text{vals}) \longrightarrow$$ چندجمله‌ای درون یابی در xvals ذخیره می‌شود.

(مثال عددی از درون یابی

$$(-1, 3), (1, 1), (2, 3), (3, 7) \qquad f = ? \qquad \begin{matrix} f(-1) = 3 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 7 \end{matrix}$$

* تفسیر: $a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$ ← دقیقاً $(n-1)$ ریشه مختلط دارد.

$$y_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i^3 \ , \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} 3 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 3 = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 \\ 7 = a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 27a_4 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{cccc} & \text{توان ۱} & \text{توان ۲} & \text{توان ۳} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}}_{V(-1, 1, 2, 3)} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ماتریس واندرموند ← وارون پذیر است.

$$\begin{cases} y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} \\ y_i = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} x_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} \\ \vdots \\ x_n^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

درون یابی نیوتون : $f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$

$$f(x_1) = a_1 \Rightarrow a_1 = y_1$$

$$f(x_2) = a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3} \\ f(1) = 1 \Rightarrow 1 = a_1 + 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -1} \\ f(2) = 3 \Rightarrow 3 = 3 - 3 + 3a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = 1} \end{cases}$$

(مثال خودمان $f(x) = a_1 + a_2(x+1) + a_3(x+1)(x-1) + a_4(x+1)(x-1)(x-2)$

ادامه درس:

روی بازه $[x_i, x_{i+1}]$: $f(z) = \underbrace{L(z)}_{\text{درون یاب خطی}} + \underbrace{\frac{f^{(2)}(\theta)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})}_{\text{خطای درون یابی}} \qquad \theta \in [x_i, x_{i+1}]$

کران خطا $\quad |\text{خطا}| = \frac{|f^{(2)}(\theta)|}{2}\,|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \;\dots$

کران خطا : $\quad \frac{\max f^{(2)}(\theta)}{2}\,\frac{\bar h^2}{4} = \frac{M_2}{8}\bar h^2$

فرض کنید می‌خواهیم خطا از δ بیشتر نشود، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\frac{M_2}{8}\bar h^2 \le \delta \Rightarrow \bar h \le \sqrt{\frac{8\delta}{M_2}}$$

سوال: بازه $[\alpha, \beta]$ به چند زیر بازه مساوی تقسیم شود تا خطای درون یابی خطی روی هر زیر بازه از $\delta = 10^{-4}$ بیشتر نشود؟

فرض $M_2 = 1$: $\quad h = \frac{\beta-\alpha}{n-1} \le \sqrt{\frac{8\times10^{-4}}{1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n-1} \le \sqrt{8\times10^{-4}} \Rightarrow n-1 \ge \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8\times10^{-4}}}$

درون یابی هرمیت: درون یابی مقدار تابع و مشتق تابع:

$(x_L, \underbrace{y_L}_{\text{مقدار تابع}})$ ، (x_R, y_R)

$(x_L, \underbrace{s_L}_{\text{مقدار مشتق تابع‌ها}})$ ، (x_R, s_R)

چهار شرط ⇐ چند جمله ای درون یاب از درجه کوچکتر یا مساوی ۳.

یک پایه ⇐ $1, (z-x_L), (z-x_L)^2, (z-x_L)^2(z-x_R)$

$$\Rightarrow q(z) = a + b(z-x_L) + c(z-x_L)^2 + d(z-x_L)^2(z-x_R)$$

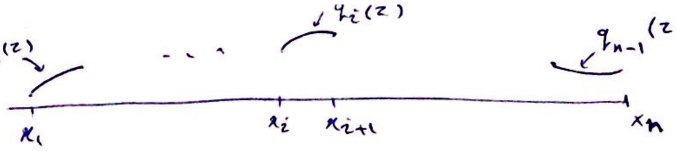
$$q'(z) = b + 2c(z-x_L) + d\left[2(z-x_L)(z-x_R) + (z-x_L)^2\right]$$

چهار شرط ⇐ $\quad q(x_L) = y_L \quad q(x_R) = y_R \quad q'(x_L) = s_L \quad q'(x_R) = s_R \qquad \xrightarrow[\Delta y = y_R - y_L]{\Delta x = x_R - x_L}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta x & (\Delta x)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2\Delta x & (\Delta x)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_L \\ s_L \\ y_R \\ s_R \end{bmatrix} \quad \checkmark \quad \Rightarrow \begin{cases} a = y_L \\ b = s_L \\ c = \dfrac{\frac{\Delta y}{\Delta x} - s_L}{\Delta x} \\ d = \dfrac{s_R + s_L - 2\frac{\Delta y}{\Delta x}}{(\Delta x)^2} \end{cases}$$

قضیه ۳ کتاب) فرض کنید $f(z)$ چهار بار مشتق پذیر پیوسته است $(f \in C^4)$ ، M_4 کران بالای مشتق چهارم f است، یعنی $|f^{(4)}(z)| \le M_4 \;\; \forall z \in [x_L, x_R]$. اگر $q(z)$ درون یاب درجه ۳ برای داده باشد آن گاه داریم: $(h = \Delta x)$

$$|f(z) - q(z)| \le \frac{M_4}{384}h^4 \quad \forall z \in [x_L, x_R]$$

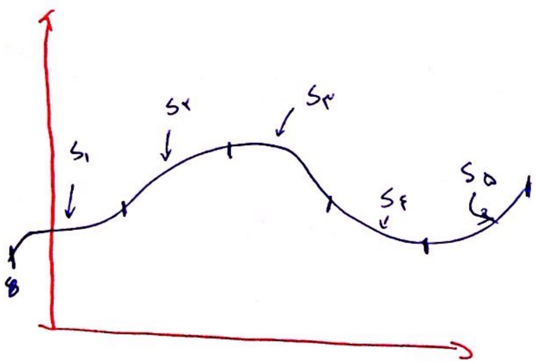


برای n نقطه داریم: $q_i(z)$ $\quad 1\le i\le n-1$

$q_i(z)$ با جایگذاری $x_L=x_i$, $x_R=x_{i+1}$ در روابط برای a, b, c, d را بدست می‌آیند.

```
n = length(x);
a = y(1:n-1);
b = s(1:n-1);
Dx = diff(x);   -->  [x2 - x1 ; ... ; xn - xn-1]
Dy = diff(y);
yp = Dy ./ Dx;
c = (yp - s(1:n-1)) ./ Dx;
d = (s(2:n-1) + s(1:n-1) - 2*yp) ./ (Dx.*Dx);
```

$$\boxed{|f(z)-q(z)| \le \frac{M_4}{384}\,h^4 \longrightarrow h^4 \le \sqrt[4]{\frac{384\varepsilon}{M_4}}}$$



درون یابی اسپلاین:

$s_i(x_i)=y_i \qquad i=1,\dots,n$

$s'_i(x_i)=s'_{i-1}(x_i) \qquad i=2,\dots,n-1$

$s''_i(x_i)=s''_{i-1}(x_i) \qquad i=2,\dots,n-1$

$s_i(x_i)=s_{i-1}(x_i) \qquad i=2,\dots,n-1$

نیاز به $4n-4$ معادله داریم ولی معادلات ما $4n-6$ معادله است که دو معادله کم داریم که آن دو تا را مشتق دوم تابع در نقاط ابتدا و انتها قرار می‌دهیم.

$$Q(x)=\begin{cases} q_1(x), & x_1\le x\le x_2\\ q_2(x), & x_2\le x\le x_3\\ \vdots & \\ q_{n-1}(x), & x_{n-1}\le x\le x_n\end{cases}$$

خواص: ① درون یابی نقاط (شامل پیوستگی Q)
② پیوستگی Q' , Q'' در نقاط میانی $x_2,\dots,x_{n-1}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} q_1(x_1)=y_1\\ q_i(x_{i+1})=y_{i+1}\\ q_{i+1}(x_{i+1})=y_{i+1}\\ q_{n-1}(x_n)=y_n\end{cases} \quad i=1,\dots,n-2$$

$$q'_i(x_{i+1})=q'_{i+1}(x_{i+1})$$
$$i=1,\dots,n-2$$
$$q''_i(x_{i+1})=q''_{i+1}(x_{i+1})$$

تعداد معادلات برابر $4n-6$ است.

یک روش برای پیدا کردن q_i ها اینست که مشتقات اول را در نقاط x_i جعل کنیم:

$(x_i, y_i, s_i) \qquad i=1,\dots,n$

سپس درون یاب هرمیت را روی نقاط بدست آوریم. ⟸ با تعیین s_iها درون یاب هرمیت نقاط را درون یابی می کند و تابع درون یاب و مشتق اول آن در نقاط میانی پیوسته است.

برای اسپلاین درجه ۳ شدن این درون یاب کافی است داشته باشیم:

$$q''_i(x_{i+1}) = q''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i=1,\dots,n-2 \longrightarrow$$

$n-2$ معادله برای n مجهول $s_1 \dots s_n$

$$\Rightarrow q_i(z) = y_i + s_i(z-x_i) + \frac{\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - s_i}{\Delta x_i}(z-x_i)^2 + \frac{s_i + s_{i+1} - 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}}{(\Delta x_i)^2}(z-x_i)^2(z-x_{i+1}) \quad (3)$$

$q_{i+1}(z) = \dots$ مشابه بالایی می نویسیم

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

با قرار دادن $q''_i(x_{i+1}) = q''_{i+1}(x_{i+1})$ و ساده سازی به دستگاه زیر می رسیم:

$$\frac{2}{\Delta x_i}\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - s_i\right) + \frac{s_i + s_{i+1} - 2\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}}{(\Delta x_i)}(4\Delta x_i) = \frac{2}{\Delta x_{i+1}}\left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}\right) + \frac{s_{i+1} + s_{i+2} - 2\left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}\right)}{(\Delta x_{i+1})^2}(-2\Delta x_{i+1})$$

ساده سازی ⟵ *

$$\Delta x_{i+1} s_i + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) s_{i+1} + \Delta x_i s_{i+2} = 3\left(\Delta x_{i+1}\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} + \Delta x_i \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}\right) \quad *$$

$$i = 1,\dots,n-2$$

با اضافه کردن شرط ها روی s_1 و s_n و معین کردن آن ها یک دستگاه سه قطری با $n-2$ مجهول $s_2,\dots,s_{n-1}$ داریم که حل آن [illegible]

s_1 و s_n را به طرف راست ببرید ⟶

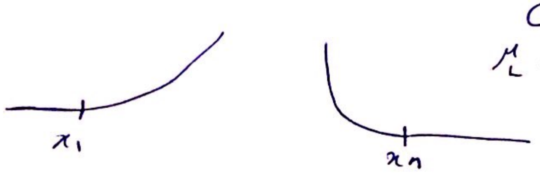
$$A = \begin{bmatrix} 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_1 & & 0 \\ \Delta x_3 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \Delta x_{n-3} \\ 0 & & \Delta x_{n-1} & 2(\Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} 3\left(\Delta x_2 \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} + \Delta x_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right) - (\Delta x_2)s_1 \\ 3\left(\Delta x_3 \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} + \Delta x_2 \frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\Delta x_{n-2} \frac{\Delta y_{n-3}}{\Delta x_{n-3}} + \Delta x_{n-3} \frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}\right) \\ 3\left(\Delta x_{n-1} \frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}} + \Delta x_{n-2} \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}\right) - \Delta x_{n-2} s_n \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

جایگذاری [illegible]

شرایط برای معین کردن s_1 و s_n :



حالت خاص $\mu_L = \mu_u = 0$

$s_1 = \mu_L$

$s_n = \mu_u$

① اسپلاین کامل

μ_L و μ_u داده شده اند.

کافی است μ_L را بجای s_1 و μ_u را بجای s_n در طرف راست دستگاه $TT = 2$ قرار دهیم.

② اسپلاین طبیعی: μ_L و μ_u را به ما می دهند.

$q_1''(x_1) = \mu_L$

$q_{n-1}''(x_n) = \mu_u$

$$2\,\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - s_1}{\Delta x_1} - 2\,\frac{s_1 + 2s_2 - 3\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{\Delta x_1} = \mu_L \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - s_2 - \frac{\mu_L}{2}\Delta x_1\right)$$

با قرار دادن طرف راست معادله آخر با جایگذاری و تعیین ضریب s_n ، s_{n-1} را به طرف و تعیین ضریب s_2 ، s_1 را

به طرف چپ معادله تک می بریم

$$\mu_R = 2\,\frac{\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} - s_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} + 4\,\frac{s_{n-1} + s_{n-2}\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}}{\Delta x_{n-1}}$$

$$\to s_n = \frac{1}{2}\left(3\,\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} - s_{n-1} + \frac{\mu_R}{2}\Delta x_{n-1}\right)$$

③ اسپلاین $N-a-K$ (Not a knot)

$q_1'''(x_2) = q_2'''(x_2) \xrightarrow[\text{در } x_2 \text{ پیوسته}]{\text{مشتق سوم}}$ $q_2(x)$, $q_1(x)$ چند جمله ای درجه ۳ یکسان هستند ⟶ گوری در x_2 وجود ندارد

$q_{n-2}'''(x_{n-1}) = q_{n-1}'''(x_{n-1})$ ⟶ گوری x_{n-1} وجود ندارد

$$\to s_1 = -s_2 + 2\,\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} + \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta y_1}\right)^2 \left(s_2 + s_3 - 2\,\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)$$

$$\to s_n = -s_{n-1} + 2\,\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} + \left(\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta x_{n-2}}\right)^2 \left(s_{n-2} + s_{n-1} - 2\,\frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}\right)$$

اسپلاین درجه ۳ در متلب:

Cubicspline(x, y, derivative, muL, muR)

۱ یا ۲

$1 \Rightarrow s_1'(x_1) = muL,\ s_{n-1}'(x_1) = muR$

$2 \Rightarrow s_1''(x_1) = muL,\ s_{n-n}''(x_1) = muR$

Cubicspline(x, y) ⟶ اسپلاین N-a-K

مثال) [a,b,c,d] = cubicspline (x, y, ...) = [s_{a_i} , s_{b_i} , s_{c_i} , s_{d_i}]

spline (۲ یا ۳ ورودی داشته باشد)

ساختن اسپلاین: ۱۰۰ نقطه می دهد.

```
x = linspace (-10, 10, 9) ;        z = linspace (-۱۰, ۱۰)
y = atan(x) ;

svals = spline (x, y, z);          s = spline (x, y) ;
plot (z, svals)          <-->      svals = ppval(s, z);
```

توابع mkpp , unmkpp : make piecewise polynomial , unmake piecewise polynomial

s = spline (x, y) ; ⟶ درون یابی نقاط $y = f(x)$ و ذخیره آن در s

[x, r, L, k] = unmkpp(s) ; x_i ها , L = تعداد تکه ها ، k = (درجه چند جمله ای + ۱)

$$S_i(x) = r(i,4) + r(i,3)(x-x_i) + r(i,2)(x-x_i)^2 + \dots , (x-x_i)^{k-j}$$ ضریب $= \underset{L\times k}{r}(i,j)$, $j = 1, \dots, k+1$

mkpp (x, d) ⟶ ضرایب چند جمله ای تنظیم شده متناسب با نقاط

$$S_i'(x) = r(i,3) + 2r(i,2)(x-x_i) + 3r(i,1)(x-x_i)^2$$

```
dr = [۳ x r(:,1)    ۲ x r(:,۲)    r(:,۳)] ;
ds = mkpp(x, dr) ;                 z = linspace (-۵, ۵);
dsvals = ppval (ds, z) ;           plot (x, dvals)
```

تخمین انتگرال معین:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i)$$

فرمول m نقطه ای براساس مقادیر f ، w_i ها وزن های فرمول نامیده می شوند.

کارایی: تعداد دفعات ارزیابی f .

تقریب های نیوتن - کوتس (Newton - cotes):

$(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \dots, m$ درون یاب یکتای $P_{n-1}(x)$

به جای f به کار می رود:

$$I \approx Q = \int_a^b P_{n-1}(x)\, dx$$

$(a, f(a)), (b, f(b)) \longrightarrow P_1(x) = f(a) + f[a,b](x-a)$ روش ذوزنقه‌ای :

$$\Rightarrow P_1(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

$$\Rightarrow Q = \int_a^b P_1(x)\,dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx = \dots = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

$(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$, $c = \frac{a+b}{2}$ $\longrightarrow P_2(x) = f(a) + f[a,c](x-a) + f[a,b,c](x-a)(x-c)$

$$Q = \int_a^b P_2(x)\,dx = \dots = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \quad w_1 = \tfrac{1}{6} = w_3, \quad w_2 = \frac{4}{6}$$

روش های وفقی: (adaptive)

ممکن است در برخی زیربازه‌ها مشتق $(d+1)$ ام کوچک باشد و نیازی به تقسیم بندی بازه‌ها به بازه‌های کوچکتر نباشد. برای بهره برداری از این خصوصیت انتگرال گیری وفقی مطرح می‌شود.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$I = A_1 +$ خطای مربوط روی بازه $[a,b]$ $\quad = A_1 + C_m\left(\frac{b-a}{m-1}\right)^{d+2} f^{(d+1)}(\eta_1) \,, \quad \eta_1 \in [a,b]$

$I = A_2 +$ خطای مرکب مربوط روی دو زیر بازه برابر مربوط به $[a,b]$ $\quad = A_2 + C_m\left(\frac{b-a}{m-1}\right)^{d+2} f^{(d+1)}(\eta_2)\,\frac{1}{2^{d+1}} \,, \quad \eta_2 \in [a,b]$

تخمین خطا:

فرض: $f^{(d+1)}(\eta_1) = f^{(d+1)}(\eta_2) = f^{(d+1)}(\eta)$ $\quad \longrightarrow I - I = 0 \approx A_1 - A_2 + C_m\left(\frac{b-a}{m-1}\right)^{d+2} f^{(d+1)}(\eta)\left(1 - \frac{1}{2^{d+1}}\right)$

$$\longrightarrow C_m\left(\frac{b-a}{m-1}\right)^{d+2} f^{(d+1)}(\eta) = \frac{A_2 - A_1}{1 - \frac{1}{2^{d+1}}} = \frac{2^{d+1}(A_2 - A_1)}{2^{d+1} - 1}$$ تخمین خطا

$E =$ تخمین خطای A_2 $= \frac{1}{2^{d+1}}$ (تخمین خطای A_1) $= \frac{A_2 - A_1}{2^{d+1} - 1}$

برنامه AdaptQNC در کتاب اسپینیر

Quad وفقی $\equiv$ QNC(3)

در Matlab:

۳ پارامتری $\longrightarrow$ Q = Quad('f', a, b) $\leftrightarrow$ $\delta = 10^{-3}$ در نظر گرفته می‌شود.

۴ پارامتری $\longrightarrow$ Q = Quad('f', a, b, tol) $\to$ δ مورد نظر کاربر

۵ پارامتری $\longrightarrow$ Q = Quad('f', a, b, tol, 1) $\to$ رسم ، [Q, count] = ... تعداد دفعات فراخوانی تابع

روش های گاوس لژاندر (گاوسی):

انگیزه: w_i ها و x_i ها نامعلوم: $\quad Q = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$

رابطه Q برای چند جمله‌ای با بیشترین درجه دقیق می‌کند. ۴ مجهول ← برای چندجمله‌ای درجه ۳ دقیق باشد.

x^0, x^1, x^2, x^3 ← کافی است برای پایه چند جمله‌ای درجه ۳ دقیق باشد

$x^0 = 1: \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 = W_1 \times 1 + W_2 \times 1$

$x: \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2$

$x^2: \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2$

$x^3: \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3$

یک جواب: $w_1 = w_2 = 1$ ، $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \,, \; x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

گاوس لژاندر دو نقطه‌ای: $Q = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

* عملیات = گاوس لژاندر m نقطه‌ای:

$$Q=\sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) = w_1 f(x_1)+\dots+w_m f(x_m)$$

باید برای چند جمله‌ای درجه $(2m-1)$ دقیق باشد.

$$x^k:\int_{-1}^{1} x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = w_1x_1^k+\dots+w_m x_m^k$$

- مزیت: با m نقطه برای چند جمله‌ای‌ها از درجه $2m-1$ دقیق است.

- عیب: فاقد قابلیت وفقی بودن.

* خطا:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{GL(m)}\right| \leqslant \frac{(b-a)^{2m+1}\,(m!)^4}{(2m+1)\left[((2m)!)^3\right]} \times M_{2m}$$

$$, M_{2m}=\max\left|f^{(2m)}(\theta)\right| , \theta\in[a,b]$$

نکته مهم: همه‌ی روابط گاوس لژاندر در بازه $[-1,1]$ نوشته می‌شوند اگر بازه $[a,b]$ باشد باید تغییر متغیر دهیم

$$\int_a^b f(y)\,dy = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x\right)dx \quad , \quad a\leqslant y\leqslant b \Rightarrow x=\frac{2}{b-a}\left(y-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$x=\frac{2}{b-a}\left(y-\frac{a+b}{2}\right) \rightarrow y=\frac{a+b}{2}+\left(\frac{b-a}{2}\right)x \quad , \quad dy=\frac{b-a}{2}\,dx$$

$$\Longrightarrow Q_{GL(m)}=\sum_{i=1}^{m} W_i\, f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i\right)$$

عملیات ماتریس - بردار:

$y = Ax$, A, $m \times n$, x, $n\times 1$ $\longrightarrow$ y, $m\times 1$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \qquad y = A * x \Rightarrow$$

```
y = zeros(m, 1)
for j = 1:n
    y = y + A(:,j) * x(j)
end
```

$\longrightarrow$ ۲m فلاپ $\longrightarrow$ (هر بار ۱ جمع و ۱ ضرب)

۲mn تعداد فلاپ‌ها

A, $m\times r$, B, $r\times n$

$$C = A * B = A \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1, & \cdots, & Ab_n \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

```
C = zeros(m, n)
for j = 1:n
    C(:,j) = A * B(:,j)
end
```

$C(i,j) = A(i,:) * B(:,j)$ $\longleftrightarrow$ تعریف ضرب خارجی

$$C = A * B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_r \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1' & \cdots \\ \vdots \\ b_r' & \cdots \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i'$$

ماتریس رتبه یک $0 \neq u \in R^m$, $v \neq 0 \in R^n$

$$, uv^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v^T & — \\ \vdots & \\ u_m v^T & — \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{bmatrix} & & \\ & u_i v_j & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

```
C = zeros(m, n)
for i = 1:r
    C = C + A(:,j) * B(i,:)
end.
```

نرم برداری: نرم روی بردارها برای تعیین اندازه بردارها بکار می‌رود. شبیه قدرمطلق برای اعداد حقیقی.

$\|\cdot\| : R^n \longrightarrow R^+$

تعریف: $\|\cdot\|$ روی $R^{n\times m}$ خواص زیر را دارد.

۱) $\|x\| > 0$ برای هر $0 \neq x \in R^{n\times m}$.

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ به ازای هر $x \in R^{n\times m}$ و هر $\alpha \in R$

$\{\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\} \Leftarrow$ (۱ و ۲)

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in R^{n}$

نرم-P $\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

موارد خاص: نرم-۱ $\quad P=1: \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$

نرم-۲ یا نرم اقلیدسی $\quad P=2: \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

نرم ∞ $\quad P=\infty: \max_{1\le i\le n} |x_i|$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

رابطه کوشی شوارتز:

$$|x^T y| \le \|x\|_2 \|y\|_2$$

$\forall x,y \in R^n \quad , \underline{|x^T y| = \|x\|_2 \|y\|_2}$ اگر و تنها اگر x و y در یک امتداد باشند یعنی $\exists\, \alpha \in R \, , \, x = \alpha y$

$$\cos\theta = \frac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

تعمیم تعریف نرم برای ماتریس ها: خواص آن کاملا مشابه خواص نرم برداری است.

تعریف نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری: $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\|A\|_1 = \cdots = \max_{1\le j\le n} \|a_j\|_1$$

ستون jام

$\|A\|_2 = \sigma_1 \longrightarrow$ بزرگترین مقدار تکین A

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \|a_i^T\|_1$$

ترانهاده سطر iام

$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ برای هر $A,B \in R^{n\times n}$

* برای P-نرم های ماتریس یک خاصیت اضافی به نام سازگاری ضربی نیز بدست می آید:

نرم فروبنیوس $= \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

* نرم فروبنیوس وابسته به هیچ نرم برداری نیست

$\|I_n\| = \max \frac{\|I x\|}{\|x\|} = 1$ و $\|I_n\|_F = (n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$

قضیه ۵: فرض کنید $0 \neq A \in R^{m \times n}$ یک ماتریس است که به صورت $\hat{A}$ ذخیره می‌شود در این صورت $\hat{A} = A + E$ که $E \in R^{m \times n}$ ، $\|E\|_1 \leqslant eps \|A\|_1$

اثبات: $\hat{a}_{ij} = fl(a_{ij}) = a_{ij}(1+\varepsilon_{ij}) = a_{ij} + \varepsilon_{ij} a_{ij}$ ، $|\varepsilon_{ij}| \leqslant eps$

$$\hat{a}_{ij} - a_{ij} = \varepsilon_{ij} a_{ij} \ , \ |\varepsilon_{ij}| \leqslant \varepsilon ps \ , \forall i,j$$

$$\rightarrow E_{ij} = \hat{a}_{ij} - a_{ij} = \varepsilon_{ij} a_{ij}$$

$$\|E\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|E_j\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |E_{ij}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_{ij} a_{ij}| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_{ij}| |a_{ij}|$$

$$\leqslant \varepsilon ps \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \varepsilon ps \|A\|_1 \leqslant eps$$

حل دستگاه‌های خطی با استفاده از تجزیه مثلثی:

$A \longrightarrow LU \qquad Ax = b \longrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b$

① $Ly = b$ برای y حل شود (دستگاه پایین مثلثی)

② $Ux = y$ برای x حل شود (دستگاه بالا مثلثی)

حل دستگاه مثلثی

پایین مثلثی $\quad \left[L \ \ 0\right] \boxed{x} = \boxed{b} \qquad Lx = b \Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21} \times x_1}{l_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \times x_j}{l_{ii}}$$

$\Leftarrow$ $x_1, \dots, x_{i-1}$ در دست اند $\leftarrow$ x_i محاسبه می‌شود $\Leftarrow$

راه دیگر

$x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \xrightarrow{\text{حذف } x_1} \quad l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n = b$

l_i ها ستون‌های L

$$l_2 x_2 + \dots + l_n x_n = b - l_1 x_1 = \bar{b}_1 \rightarrow x_2 = \frac{\bar{b}_1}{l_{22}}$$

$\vdots$

$$l_i x_i + \dots + l_n x_n = \bar{b}_{i-1} - l_{i-1} x_{i-1} = \bar{b}_i \rightarrow x_i = \frac{\bar{b}_i}{l_{ii}}$$

دستگاه بالا مثلثی $\quad Ux = \left[0 \ \ U\right] \boxed{x} = \boxed{b} \longrightarrow$ مشابه بالا

دو راه داریم، یا x_n را داریم، در معادله بالایی آن جایگزینش کنیم. یا کلا ستون و سطر n ام را حذف کنیم.

برای ... نیاز است.

چگونگی محاسبه L و U در تجزیه A به صورت LU :

مثال)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \\ -4x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= -28 \\ 6x_1 + 13x_2 + 16x_3 &= 37 \end{aligned}$$

روش حذفی گاوس برای بالا مثلثی کردن $\longrightarrow$

سطر دوم $\leftarrow$ سطر دوم $-\ \overbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}^{m_{21}} \times$ سطر اول

سطر سوم $\leftarrow$ سطر سوم $-\ \overbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}^{m_{31}} \times$ سطر اول

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 4x_2 + x_3 &= -2 \\ 16x_2 + 7x_3 &= -2 \end{aligned}$$

عملاً ← ۱

در حقیقت

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 16 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_1 b = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{M_1 A x = M_1 b}$$

معادله سوم $\leftarrow$ معادله سوم $-\ \overbrace{\left(\frac{16}{4}\right)}^{m_{32}}$ معادله دوم جدید

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 4x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

حل

مثال: فرض

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A^{(2)} \equiv U, \quad M_2 b^{(1)} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = b^{(2)}$$

$$M_1 A = A^{(1)}, \quad M_2 A^{(1)} = M_2 M_1 A = U \Longrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L} U$$

جمع‌بندی: $=b$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$*A = LU, \quad L = M_1^{-1} M_2^{-1}, \quad \bar{b} = M_2 M_1 b = L^{-1} b \longrightarrow \underbrace{L\bar{b} = b}$$

n^2 فلاپ

تا جواب دستگاه است

• برای محاسبات $\frac{2}{3}n^3$ فلاپ لازم داریم.

* در عمل هر m_{ij} برای صفرکردن a_{ij} تغییر یافته در جدول در محل ij در ماتریس ذخیره می‌شود و عملیات درایه‌های جدید بالا مثلثی را روی درایه‌های ماتریس نگه می‌دارد.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} & U \\ -m_{ij} & \end{pmatrix}$$

در حقیقت: $A \longrightarrow LU$ ذخیره شده به صورت بالا.

$$L = \text{eye}(n,n) + \text{tril}(A, -1)$$

از زیر قطر اصلی به پایین

$$U = \text{triu}(A)$$

ممکن است در روند تجزیه گوس با درایه قطری محور برابر با صفر (یا بسیار کوچک) مواجه شویم. در این حالت می‌توان دو سطر را جابجا کرد.

برای پایداری روش حذفی گوس (کنترل اندازه اعداد میانی) محورگزینی پاره‌ای یا ستونی به صورت زیر انجام می‌شود:

$$|a_{qk}^{(k)}| = \max |a_{ik}^{(k)}| \longrightarrow \text{if } q \neq k \longrightarrow$$ سطرهای k و q جابجا می‌شوند

اثر یعنی ← $P_k \; A^{(k-1)}$ ← سطرهای k و q را جابجا می‌کند

$P_k^{-1} = P_k^T = P_k$ $\qquad$ $P_k =$ ماتریس همانی است که سطرهای k و q آن جابجا شوند.

عملاً ← $P_{n-1} \cdots P_1 \, A = \bar{A} = LU$ با دانستن جابجایی‌های لازم در هر ستون. ⇐ $PA = LU$

$\Rightarrow P^{-1} = P^T = P_1 \cdots P_{n-1}$

در متلب: $[L, U, P] = LU(A)$ و $x = A \backslash b$ حل دستگاه

$PAx = LUx = Pb = \bar{b}$

$Ly = \bar{b} \quad , \quad Ux = y$

حل تمرین چهارشنبه ۹,۱۷

مثال: فرض کنید که $C(x)$ درون‌یاب هرمیت تابع f در نقاط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد. آنگاه نشان دهید:

$$C = \int_a^b C(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right]$$

$$C(a) = f(a) \;,\; C_b = f(b) \;,\; C'(a) = f'(a) \;,\; C'(b) = f'(b) \qquad x_1 = a,\; x_2 = a,\; x_3 = b,\; x_4 = b$$

$$C(x) = f[a] + \underbrace{f[a,a]}_{f'(a)}(x-a) + f[a,a,b](x-a)^2 + f[a,a,b,b](x-a)^2(x-b)$$

$$f[a,a,b] = \frac{f[a,a] - f[a,b]}{a-b} = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)\overbrace{(b-a)}^{h}}{\underbrace{(b-a)^2}_{h^2}} \quad , \; b - a = h$$

$$f[a,a,b,b] = \frac{f[a,a,b] - f[a,b,b]}{b-a} = \frac{\dfrac{f'(b)(b-a) - f(b) + f(a)}{(b-a)^2} - \dfrac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}}{b-a}$$

$$\Rightarrow f[a,a,b,b] = \frac{2f(a) - 2f(b) + \left(f'(a) + f'(b)\right)h}{h^3}$$

$$C = \int_a^b C(x)\,dx \underset{x-a=t}{=} \int_0^h C(t+a)\,dt = \int_0^h \left[f(a) + f'(a)t + \frac{f(b) - f(a) - f'(a)h}{h^2}t^2 + \frac{2f(a) - 2f(b) + (f'(b) + f'(a))h}{h^3}t^2(t-h)\right]dt$$

$$= f(a)h + \frac{f'(a)}{2}h^2 + \frac{f(b) - f(a) - f'(a)h}{3h^2}h^3 + \frac{2f(a) - 2f(b) + (f'(b) + f'(a))h}{h^3}\left[\frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{3}\right]$$

$$= f(a)h + \frac{f'(a)}{2}h^2 + \frac{f(b) - f(a) - f'(a)h}{3}h - \frac{2f(a) - 2f(b) + (f'(a) + f'(b))h}{12}h$$

$$= h\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{3} - \frac{f(a) - f(b)}{6}\right) + h^2\left(\frac{f'(a)}{2} - \frac{f'(a)}{3} - \frac{f'(b) + f'(a)}{12}\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \left(\frac{f'(a)}{12} - \frac{f'(b)}{12}\right)h^2 \quad \blacksquare$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_{NC}(m) \quad , \quad Q_{NC}(m) = \int_a^b P_{m-1}(x)\,dx$$

$$P_{m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i) \Rightarrow Q_{NC}(m) = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_a^b \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i)\,dx \quad , \quad \begin{aligned} h &= b-a \\ x &= a + sh \\ x_i &= a + (i-1)h \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^{m-1} \prod_{i=1}^{k-1} \big((s - i + 1)h\big)\, h\, ds = \sum_{k=1}^{m} c_k h^{k} \int_0^{m} \prod_{i=1}^{k-1} (s - i + 1)\,ds$$

$$\Rightarrow Q_{NC}(m) = h \sum_{k=1}^{m} c_k h^{k-1} S_{mk} = h \sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i)$$

$$\boxed{\text{اگر } m \text{ فرد باشد} \longrightarrow \omega_i = \omega_{m-i+1}}$$

مثال: برای تقریب انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ، کوادراتور نیوتن کوتس $Q = (b-a)\sum_{i=1}^{m} \omega_i f(x_i)$ با مرتبه دلخواه فرد m ($2l+1$) را در نظر بگیرید.

الف) برای $c = \frac{a+b}{2}$ نشان دهید که این کوادراتور برای توابع $f_k(x) = (x-c)^{2k-1}$ که $k = 1, \dots, \frac{m+1}{2}$ ($l+1$) دقیق است.

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (الف) اثبات کنید که:

$$\forall i = 1, \dots, m \; : \; \omega_i = \omega_{m-i+1}$$

(پاسخ الف) $I = \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b (x-c)^{2k-1}\,dx = \frac{(x-c)^{2k}}{2k}\Big|_a^b = 0$

$$Q^{(k)}_{NC(2l+1)} = \int_a^b \underbrace{P^{(k)}_{2l}(x)}_{\text{چندجمله‌ای درون‌یاب}}\,dx = \int_a^b (x-c)^{2k-1} = 0 \qquad k = 1, \dots, l+1$$

$! \; f_{(x)} = (x-c)^{2k-1}$

$(2l+1)$ نقطه

(پاسخ ب) $Q^{(k)}_{NC(2l+1)} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, l+1 \Rightarrow (b-a)\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_k(x_i) = 0 \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_k(x_i) = 0}$

$$f_k(x_i) = (x_i - c)^{2k-1} = \left(a + (i-1)\frac{b-a}{2l} - \frac{a+b}{2}\right)^{2k-1} = \left(\frac{(2l - i + 1 - l)a + (i-1-l)b}{2l}\right)^{2k-1}$$

$$= \left(\frac{(l-i+1)(a-b)}{2l}\right)^{2k-1} = -\left(\frac{(i-1-l)(a-b)}{2l}\right)^{2k-1} = -f_k(x_{2l+1-i}) = -\left(\frac{(l-2l-1+i)(a-b)}{2l}\right)^{2k-1}$$

$$f_k(x_i) = \left(\frac{(l-i+1)(a-b)}{2l}\right)^{2k-1}$$

$$f_k(x_i) = -f_k(x_{2l+1-i})$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x_1) & \cdots & f_m(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{bmatrix} = 0$$

$$\omega_1 f_k(x_1) + \dots + \omega_m f_k(x_m) = 0$$

$$-\omega_m f_k(x_1) + \dots + -\omega_1 f_k(x_m) = 0$$

$$(\omega_1 - \omega_m) f_k(x_1) + \dots + (\omega_m - \omega_1) f_k(x_m) = 0$$

حل دستگاه $A^T x = c$:

$A = LU \Rightarrow A^T = U^T L^T \Rightarrow U^T \underbrace{L^T x}_{y} = c$

۱) $U^T y = c$ برای y حل شود.   ۲) $L^T x = y$ برای x حل شود.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ جواب دقیق

تحلیل خطا در حل دستگاه :

دو بردار زیر را در نظر بگیرید :

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

بردار باقی مانده

$$r_1 = b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|b - Ax^{(1)}\|_2 = 10^{-6}$$

$$r_2 = b - Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.78 \times 10^{-3} \\ 0.913 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \|b - Ax^{(2)}\|_2 \approx 10^{-3}$$

* اگرچه $x^{(2)}$ به جواب دقیق نزدیک‌تر است ولی r_1 کوچکتر از r_2 است. این پدیده ناشی از بزرگ بودن عدد حالت ماتریس A است.

تعریف عدد حالت : عدد حالت A $= k(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. معمولا نرم ۱، ۲ و ∞ بکار می‌رود.

خواص :

1) $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| = k(A) \Rightarrow 1 \le k(A)$

2) $k(\alpha A) = k(A)$

۳) هرچه عدد حالت A بزرگتر باشد، ماتریس A بدحالت‌تر است و به تکین بودن نزدیک‌تر می‌شود.

برای مثال قبل : $A^{-1} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.659 & -0.563 \\ -0.913 & 0.780 \end{bmatrix} \longrightarrow K(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 1.5 \times 10^6 \times 1.5 = 2.25 \times 10^6$

پایداری عددی پسرو یا پایداری عددی یک الگوریتم :

نشان داده می‌شود که جواب محاسبه شده جواب دقیق چه مسأله‌ای است؟

اگر به ازای همه‌ی داده‌های دستگاه جدید به دستگاه اصلی نزدیک باشد آن گاه روش را پایدار عددی می‌نامند.

می‌توان نشان داد که جواب محاسبه شده $\hat{x}$ از روش حذف گاوس با انتخاب محور سطری در دستگاه زیر صدق می‌کند.

$$(A+E)\hat{x} = b, \quad \|E\| \approx eps\|A\| \quad \text{یا} \quad \frac{\|E\|}{\|A\|} \approx eps$$

$$\|b - A\hat{x}\| = \|E\hat{x}\| \le \|E\|\|\hat{x}\|, \quad \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|A\|\|\hat{x}\|} \le \frac{\|E\|}{\|A\|} \approx eps$$

این نشان می‌دهد که جواب محاسبه شده همواره باقی‌مانده کوچکی دارد.

برای $\hat{x}$: x را جواب دقیق دستگاه در نظر بگیرید

$$(A+E)(\hat{x} - x) = (A+E)\hat{x} - Ax - Ex = b - b - Ex = -Ex$$

$$\hat{x} - x = -(A+E)^{-1}Ex \Rightarrow \|\hat{x} - x\| \le \|(A+E)^{-1}\|\|E\|\|x\| \approx \|A^{-1}\|\|E\|\|x\|$$

۱۲ $\Rightarrow \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|E\| = \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|E\|}{\|A\|}$

اگر $k(A)=10^p$ و $eps=10^{1-t}$ آنگاه می‌توان انتظار داشت که تقریباً $t-p$ رقم $\hat{x}$ دقیق باشد. اگر $p \geq t$ آنگاه هیچ یک از رقم‌های $\hat{x}$ قابل اعتماد نیست.

مساله کمترین مربعات خطی: $A_{m\times n}$, $x \in R^n$, $\min \|Ax-b\|_2^2$ یا $\min \|Ax-b\|_2$

$$\Rightarrow A^T A X = A^T b$$

تجزیه‌های ماتریس QR و چولسکی:

انگیزه: برازش داده: (t_i, b_i) , $i=1,\dots,m$ ، t_i ها متمایز.

توابع پایه: $\phi_1(t)$ ، ... ، $\phi_n(t)$ ← تابع یا مدل برازش: $\phi(t) = x_1\phi_1(t)+\dots+x_n\phi_n(t)$

$$\min_{x_1,\dots,x_n} \|\phi(t)-b\|_2 \quad \text{یا} \quad \min \|\phi(t)-b\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (\phi(t_i)-b_i)^2 = \sum_{i=1}^m (x_1\phi_1(t_i)+\dots+x_n\phi_n(t_i)-b_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^m (a'_i x - b_i)^2 = \|Ax-b\|_2^2$$

a'_i ها ماتریس ضرایب در دنیاA

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_1(t_i) & \cdots & \phi_n(t_i) \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow x^* \text{ جواب مساله} \Rightarrow \phi(t) = x_1^*\phi_1(t)+\dots+x_2^*\phi_2(t)$$

در MATLAB ← $x=A\backslash b;$ ← جواب بدست آمده جواب مساله کمترین مربعات خطی است که اگر $Ax=b$ جواب داشته باشد، آنگاه جواب دستگاه است.

تجزیه QR برای حل مساله کمترین مربعات خطی:

$A_{m\times n}$ ← ستون‌ها مستقل خطی

$$\Downarrow$$

$\exists Q_{m\times n}$ متعامد نرمال ، $A_{1\,n\times n}$ ⟶ ناتکین و بالامثلثی

به طوری که $A = QR = [Q_1\ Q_2]\begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 A_1$

$$Q^T Q = Q Q^T = I_m \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

خواص Q: طول بردار، در اثر ضرب Q تغییر نمی‌کند:
$$\|Qx\|_2^2 = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Q x = x^T x = \|x\|_2^2$$

از این رو تبدیل A با ضرب آن توسط ماتریس‌های متعامد نرمال فرآیندی پایدار است.

- ستون‌های Q دو به دو متعامد هستند و طول برابر با یک دارند:

$$Q^T Q = I \longrightarrow q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} q_1^T & — \\ \vdots & \\ q_m^T & — \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & — & q_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

- Q^T ماتریس متعامد نرمال است.

- می‌توان نوشت $A=QR$ و $Q^T A = R$

حل: $\min \|Ax-b\|_2$

$$\longrightarrow \|Ax-b\|_2 = \|Q^T(Ax-b)\|_2 = \|Q^TAx-Q^Tb\|_2 = \|Rx-Q^Tb\|_2$$

$$= \left\|\begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix}x - \begin{pmatrix}Q_1^Tb\\Q_2^Tb\end{pmatrix}\right\|_2 = \|A_1x-Q_1^Tb-Q_2b\|_2 \geqslant \|Q_2^Tb\|_2$$

$x^* \xleftarrow{\text{جواب}} A_1x - Q_1^Tb = 0$ یا $A_1x = Q_1^Tb$ پس مقدار min به ازای صفر ~~[illegible]~~ تابع

x جواب دستگاه بالا مثلثی است و مقدار min آن برابر است با: $\|Ax^*-b\|_2 = \|Q_2^Tb\|_2$

الگوریتم: ۰) ماتریس A مربوط به توابع پایه و t_i ها را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \phi_i(t_1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \phi_i(t_m) & \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ستون‌ها مستقل خطی}$$

۱) تجزیه QR را برای A بدست آورید: $\underbrace{[Q,R]=QR(A)}_{MATLAB} \longrightarrow Q=[Q_1, Q_2] \longrightarrow$ n ستون اول.

$R = \begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix} \leftarrow A_1, n\times n$

۲) دستگاه $Ax = Q_1^Tb$ را برای x حل کنید.

۳) مقدار min برابر است با: $\|Q_2^Tb\|_2$.

چگونگی محاسبه تجزیه QR:

تعریف: ماتریس گیون: ماتریس $G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c\end{bmatrix}$, $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ را (Given's rotation) می‌نامند.

ماتریس گیون متعامد نرمال است: $G^TG = I_{2\times2}$

اگر θ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$C = \cos\theta = \frac{x_1}{\|x\|_2} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

$$S = \sin\theta = \frac{x_2}{\|x\|_2}, \quad Gx = \begin{bmatrix}\|x_2\| \\ 0\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \quad i & \quad k \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cdots & a_{ii} & \cdots & \times & \cdots \\ \cdots & a_{ki} & \cdots & \times & \cdots \end{bmatrix} \end{array}$$

می‌خواهیم درایه k ام روی ستون i ام توسط درایه i ام صفر شود

$$\Longrightarrow G(i,k,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & c & & s \\ & & & \ddots & \\ & & -s & & c \\ 0 & & 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$$

متعامد نرمال

ضرب G در A تنها سطرهای i و k را تغییر می‌دهد.

$$A([i\,k],:) = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } 2\times2} A([i\,k],:)$$

$$C = \cos\theta = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ki}^2}}, \quad S = \sin\theta = \frac{a_{ki}}{\sqrt{a_{ii}^2+a_{ki}^2}}$$

حل: $\min \|Ax-b\|_2$

دستگاه

$$\longrightarrow \|Ax-b\|_2 = \|Q^T(Ax-b)\|_2 = \|Q^TAx - Q^Tb\|_2 = \|Rx - Q^Tb\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{pmatrix} \right\|_2 = \| A_1 x - Q_1^T b - Q_2 b \|_2 \geqslant \|Q_2^T b\|_2$$

$x^* \xleftarrow{\text{جواب}} A_1 x - Q_1^T b = 0$ یا $A_1 x = Q_1^T b$ پس مقدار min به ازای صفر ... تابع

x جواب دستگاه بالا مثلثی است و مقدار min آن برابر است با: $\|Ax^* - b\|_2 = \|Q_2^T b\|_2$

تجزیه جواب برای ...

الگوریتم: ۰) ماتریس A مربوط به توابع پایه و t_i ها را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \phi_i(t_1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \phi_i(t_m) & \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ستون‌ها مستقل خطی}$$

پس از ۱) تجزیه QR را برای A بدست آورید: $\underbrace{[Q,R] = QR(A)}_{MATLAB} \longrightarrow Q = [Q_1, Q_2]$، n ستون اول.

$R = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow A_1, n\times n$

در واقع ۲) دستگاه $A x = Q_1^T b$ را برای x حل کنید:

۳) مقدار min برابر است با: $\|Q_2^T b\|_2$.

چگونگی محاسبه تجزیه QR:

ماتریس

تعریف: ماتریس گیون: ماتریس $G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ را (Given's rotation) می‌نامند.

تعریف

ماتریس گیون متعامد نرمال است: $G^T G = I_{2\times 2}$

می‌تو

اگر θ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$C = \cos\theta = \frac{x_1}{\|x\|_2} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

می‌تو

$$S = \sin\theta = \frac{x_2}{\|x\|_2}, \quad Gx = \begin{bmatrix} \|x_2\| \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c|cc} & i & k \\ \hline i & a_{ii} & \times \\ k & a_{ki} & \times \end{array}$$

می‌خواهیم درایه k ام روی ستون i ام توسط درایه i ام صفر شود

$$\Longrightarrow G(i,k,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & c \;\cdots\; s & & 0 \\ & & \vdots \quad \vdots & & \\ 0 & & -s \;\cdots\; c & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

متعامد نرمال

ضرب G در A تنها سطرهای i و k را تغییر می‌دهد.

$$A([i\ k], :) = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس } 2\times 2} A([i\ k], :)$$

$$C = \cos\theta = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ki}^2}}, \quad S = \sin\theta = \frac{a_{ki}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ki}^2}}$$

بالا مثلثی کردن A با تبدیلات متعامد نرمال:

$$G(m-1,m) \ast \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \times & & \times \\ \times & \times & \vdots & & \times \\ \boxed{\times} & \times & \vdots & & \times \\ \times & \times & \vdots & & \times \\ \times & \times & \times & & \times \end{bmatrix} \Rightarrow G(1,2)\cdots G(m-1,m)\,A = \begin{bmatrix} \|a_1\|_2 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

$\frac{\text{ستون ۱}}{m-1} \quad \cdots \quad \frac{\text{ستون } n}{m-n} \longleftarrow$ تعداد G_i ها

$$\Rightarrow \overbrace{G_t \cdots G_1}^{Q^T} A = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$5n^3 \simeq 7\left(\frac{2}{3}n^3\right)$ (دستگاه‌ها) $m=n$ $\longleftarrow$ $(9m-4n)n^2$ $\quad$ 4×2 تعداد فلاپ های لازم

حل تمرین روز چهارشنبه:

$\ast$ اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم: $\quad Ax = Bx \quad ; A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

نشان دهید $A=B$:

برای هر $(j=1,\dots,n)$ قرار می‌دهیم $x = e_j$ ، $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ درایه jام ۱

$Ae_j = Be_j \Rightarrow$ (ستون jام A) $=$ (ستون jام B) $\Rightarrow A=B$

$\ast$ $AB = I_n$ ، $BA = I_m$ ، $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ، $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\longrightarrow$ نشان دهید $m=n$

$m = \text{trace}(I_m) = \text{trace}(BA) = \text{trace}(AB) = \text{trace}(I_n) = n \Rightarrow \boxed{m=n}$

$\ast$ A ، B ، $A+B$ تاکین هستند. نشان دهید:

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

(حل)

$$[A(A+B)^{-1}B]^{-1} = B^{-1}(A+B)A^{-1} = B^{-1}(I+BA^{-1}) = B^{-1}+A^{-1} = [(A^{-1}+B^{-1})^{-1}]^{-1} \quad \checkmark$$

$$[B(A+B)^{-1}A]^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}(AB^{-1}+I) = A^{-1}+B^{-1} = [(A^{-1}+B^{-1})^{-1}]^{-1}$$

$\ast$ نشان دهید که اگر A ماتریس رتبه ۱ باشد (فقط یک سطر مستقل دارد) [می‌دانیم که اگر] $u, v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ، ماتریس uv^T یک ماتریس رتبه ۱ است و هر ماتریس رتبه یک به صورت uv^T است.

$$\left[\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right.$$

ثابت کنید: $A^n = \tau^{n-1}A$ برای $\tau \in \mathbb{R}$ ثابت.

$$A^2 = (uv^T)(uv^T) = u\,(\underbrace{v^Tu}_{\text{عدد}})\,v^T = (v^Tu)\,uv^T = \tau A \qquad \boxed{\tau = v^Tu}$$

فرض: $A^k = \tau^{k-1}A$

$$A^{k+1} = A^kA = \tau^{k-1}AA = \tau^{k-1}A^2 = \tau^kA \quad \checkmark$$

دستگاه نرمال برای کم‌ترین مربعات خطی و ارتباط با تجزیه QR :

$$\min \|Ax-b\|_2 \equiv \|Ax-b\|_2^2$$

$$f(x) = \|Ax-b\|_2^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = x^TA^TAx \overbrace{-2b^TAx}^{-2x^TA^Tb} + b^Tb$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = 2A^TAx - 2A^Tb = 0 \Rightarrow A^TAx = A^Tb$$ (دستگاه نرمال)

<u>دستگاه نرمال و تجزیه QR</u> : $A = QR = R_1\tilde{R} \to A\tilde{R}^{-1} = Q_1$

$$A^TA = (QR)^T(QR) = R^T\underbrace{Q^TQ}_{I}R = R^TR = \begin{pmatrix}\tilde{R}^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{R} \\ 0\end{pmatrix} = \tilde{R}^T\tilde{R}$$ تجزیه چولسکی برای A^TA

دستگاه نرمال $\tilde{R}^T\tilde{R}x = A^Tb \quad (**)$

پس از تجزیه QR برای A ، عامل چولسکی یعنی $\tilde{R}$ در دست است به طوری که $A^TA = \tilde{R}^T\tilde{R}$

در واقع، حل کمترین مربعات به وسیله تجزیه QR به طور ضمنی دستگاه نرمال را بکار می‌گیرد:

$$\tilde{R}x = Q_1^Tb \Rightarrow x = \tilde{R}^{-1}Q_1^Tb = \tilde{R}^{-1}(A\tilde{R}^{-1})^Tb = \tilde{R}^{-1}\tilde{R}^{-T}A^Tb = (\tilde{R}^T\tilde{R})^{-1}A^T$$

$(\tilde{R}^T\tilde{R})x = A^Tb$ که همان دستگاه (**) است

ماتریس معین مثبت و تجزیه چولسکی :

تعریف: A ، $n\times n$ ، متقارن ، معین مثبت است اگر $x^TAx > 0, \ \forall\, 0 \neq x \in R^n$

می‌توان نشان داد که A معین مثبت است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه A اعداد مثبت باشند.

می‌توان نشان داد که A معین مثبت است اگر و تنها اگر G (به نام عامل چولسکی) پایین مثلثی ناتکین موجود باشد به طوری که

$A = GG^T$ (همان تجزیه LU است به طوری که $\left\{\begin{matrix} L = G \\ U = L^T\end{matrix}\right.$)

روش مستقیم برای پیدا کردن G :

$$A = GG^T \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & & & 0 \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & g_{nn}\end{bmatrix}$$

سطر اول G $\Rightarrow a_{11} = g_{11}^2 \Rightarrow g_{11} = \sqrt{a_{11}}$ (برای یگانه بودن تجزیه فقط عامل مثبت را در نظر می‌گیریم)

سطر دوم G $\Rightarrow a_{21} = g_{21}g_{11} \to g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}$, $a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2 \to g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2}$

سطر i ام G $\Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} g_{ik}g_{jk} = g_{ij}g_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}$ ... $\sum_{k=1}^{j-1}$ ...

(۱۴) $\cancel{g_{ij}g_{jj} = a_{ij} - \sum^{j-1} g_{ik}g_{jk}}$

$$g_{ij} = \begin{cases} s_{ij}/g_{jj}, & j=1,\dots,i-1 \\ \sqrt{s_{jj}}, & j=i \end{cases}$$

مثال: $A = \begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&5&1\\2&1&4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&5&1\\2&1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g_{11}&&0\\g_{21}&g_{22}&\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11}&g_{21}&g_{31}\\&g_{22}&g_{32}\\0&&g_{33}\end{pmatrix}$$

$g_{11} = \sqrt{4} = 2$, $g_{21} = \frac{-2}{2} = -1$, $g_{22} = \sqrt{5-(-1)^2} = 2$, $a_{31} = 2 = g_{31}g_{11} \Rightarrow g_{31} = 1$

$g_{32} = 1 = g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \longrightarrow g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = 1$

$a_{33} = g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 \Rightarrow g_{33} = \sqrt{a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow G = \begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\1&1&\sqrt2\end{pmatrix}$

پیدا کردن ریشه یا صفر تابع غیرخطی: رابطه تکراری: A را اسکالر و $x_t = \frac{1}{2}\left(x_c + \frac{A}{x_c}\right)$ تکرار را انجام می‌شود تا x_t همگرا شود.

$x_c = x_t$

نکات: ۱- نقطه شروع چه باشد؟ ۲- آیا رابطه تکراری همگرا است؟ ۳- سرعت همگرایی؟

توجه: در صورت همگرایی، $X = \frac{1}{2}\left(X + \frac{A}{X}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+A}{x}\right) \Rightarrow 2x^2 = x^2 + A \Rightarrow x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$

نمایش A در مبنای ۴ را در نظر بگیرید:

$A = m \times 4^e$ $\qquad 0 < x_c < 1 \longrightarrow \left[x_c, \frac{A}{x_c}\right]$

$\sqrt{A} = \sqrt{m} \times 2^e$ $\qquad \frac{1}{4} < m < 1$ بازه تعریف شده است

برای پیدا کردن $\sqrt{A}$، کافی است $\sqrt{m}$ بدست آید که m مانتیس نمایش مبنای ۴ برای A است و $\frac{1}{4} \le m < 1$

$f_m = \sqrt{m}$

برای نقطه اولیه تقریبی از $f(m)$ با درون‌یابی خطی را در نظر بگیرید. ← نقاط درون‌یاب $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (1,1)$

$\longrightarrow l(m) = \frac{1+2m}{3}$

تقریب اولیه: $X_c = l(m) \approx f(m) = \sqrt{m} = x^*$, $|x^* - x_c| = \left|\sqrt{m} - \frac{1+2m}{3}\right| = \left|\frac{3\sqrt{m} - 1 - 2m}{3}\right|$

$\left|\frac{3\sqrt{m} - 1 - 2m}{3}\right| \le ?$ با مشتق‌گیری ماکسیمم را پیدا کنید. مشتق $= 0 \Rightarrow 4\sqrt{m} = 3 \Rightarrow m = \frac{9}{16}$

در $m = \frac{9}{16}$ مشتق دوم < 0

پس $m = \frac{9}{16}$ ماکسیمم کننده است، و بنابراین

$|x^* - x_c| \le \left|\frac{3(\frac{3}{4}) - 1 - \frac{18}{16}}{3}\right| = \frac{1}{24} < 0.05$

رابطه تکراری: $x_t = \frac{1}{2}\left(x_c + \frac{A}{x_c}\right)$ ، $A = m$ ، $\frac{1}{4} \leq m < 1$

$$x_t - x^* = x_t - \sqrt{m} = \frac{1}{2}\left(x_c + \frac{m}{x_c}\right) - \sqrt{m} = \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{x_c - \sqrt{m}}{x_c}\right)^2 = \frac{1}{2x_c}\left(x_c - \sqrt{m}\right)^2$$

$$\leq 2\left(x_c - x^*\right)^2$$

آهنگ همگرایی مجانبی (موضعی) از مرتبه دوم در دست است.

اگر x_c نزدیک به x^* باشد مثلاً 10^{-1} تا $(x_c - x^*)$ آنگاه پس از چند تکرار خطا به اندازه کافی کوچک می‌شود.

تکرار خطا در تکرار $(k+1)$ ام: $e_{k+1} \leq C e_k^2$, $k=4 \Rightarrow e_5 \leq C e_4^2 \leq C^2 e_{k-1}^4 \leq \cdots \leq \boxed{C^5 e_0^{32}}$

توابع به طور یکنواخت کاهشی یا افزایشی و پیوسته اگر $f(a)f(b) < 0$ آنگاه یک ریشه در $[a,b]$ موجود است.

$m = \frac{a+b}{2}$

```
while abs(a-b) > delta & f(m) ≠ 0
    if f(a) f(m) < 0
        b = m
    else
        a = m
    end
    m = (a+b)/2
end
```

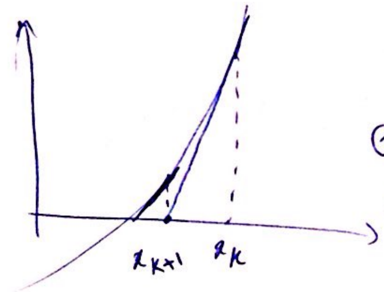
همگرایی مجانبی خطی: $|x_k - x^*| \leq C|x_{k-1} - x^*|$

$0 < C < 1$

$L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$

$L(x) = 0$, $0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$

$$x_{k+1} = x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



روش نیوتون
(کاهشی)

$x = \sqrt{A}$ $\quad f(x) = x^2 - A = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - A}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + A}{2x_k}$

$$= \frac{x_k^2 + A}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right)$$

روش نیوتن مشکلاتی دارد: ۱- ممکن است تکرارها واگرا شوند.

۲- مشکل محاسباتی دارد ($f'(x_k)$ نزدیک صفر باشد)

$f(x_k)$ دور از جواب

یک راه حل: فرض کنید $x^* \in [a,b]$ ($f(a)f(b) < 0$) اگر x_{k+1} در روش نیوتن در بازه $[a,b]$ نباشد آن‌گاه قرار دهید $x_{k+1} = \frac{a+b}{2}$

اگر $x_{k+1} \notin [a,b]$ آنگاه $x_{k+1} = \frac{a+b}{2}$ و ... $\quad$ تکرار k ام $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

روش وتری یا سکانت:

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

نرخ همگرایی: $|x_{k+1} - x^*| \le c\,|x_k - x^*|^{r_0}$, $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$

به خاطر کم هزینه بودن هر تکرار، معمولاً این روش سریع‌تر از روش نیوتون خواهد بود.

MATLAB $r = $ fzero('fname', $\overset{\text{نقطه شروع}}{1}$) ، شرط توقف $|r - r^*| \approx |r|\,eps$

fzero('fname', 1, tol) $\longrightarrow$ شرط توقف $\frac{|r - r^*|}{|r|} \simeq tol$

مینیمم سازی:

$$\min f(x) \longrightarrow f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{روش نیوتون}} x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

$$x_{k+1} \longrightarrow \bar{x} \ , \quad f'(\bar{x}) \approx 0$$

روش دیگر دوم: تقریب درجه ۲ f را حول x_k پیدا کنیم و مشتق آن را صفر قرار دهیم.

$$f(x) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2}_{q(x)} + \ldots$$

$$q'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) = 0 \Rightarrow x_{k+1} = x = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول با شرط اولیه: $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$

هدف: محاسبه تخمین $y(t)$ در تعدادی نقاط:

$t_0, t_1, \ldots, t_{max}$ $\quad t_0 \ \ t_1 \ \ t_2 \ \ \ldots \ \ t_{max}$

$(t_0, y_0) \longrightarrow (t_1, y_1) \ldots, (t_{max}, y_{t_{max}})$ $\qquad y_{t_i} \approx y(t_i)$

کاربرد: با $i = 0, \ldots, max$ ، (t_i, y_i) می‌توان تابع را رسم کرد plot(t,y) یا توابعی به عنوان تقریب y به تابع برازش داد.

روش اویلر:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{(t_{n+1} - t_n)}_{h_n} y'(t_n) + \frac{1}{2}(t_{n+1} - t_n)^2 y''(\eta)$$

$$y(t_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$

خطای موضعی $= \frac{h_n^2}{2} y''(\eta) = O(h_n^2)$. این روش از مرتبه ۱ (۲٫۱) است.

الگوریتم: $n = 0$ repeat

$f_n = f(t_n, y_n) \longrightarrow y_{n+1} = y_{n-1}\, h_n\, f(t_n, f_n)$

$t_{n+1} = t_n + h_n$ [illegible]

until $n = max$

رابطه تکراری: $x_t = \frac{1}{2}\left(x_c + \frac{A}{x_c}\right)$ ، $A = m$ ، $\frac{1}{4} \le m < 1$

$$x_t - x^* = x_t - \sqrt{m} = \frac{1}{2}\left(x_c + \frac{m}{x_c}\right) - \sqrt{m} = \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{x_c - \sqrt{m}}{x_c}\right)^2 = \frac{1}{2x_c}\left(x_c - \sqrt{m}\right)^2$$

$$\le 2(x_c - x^*)^2$$

آهنگ همگرایی مجانبی (موضعی) از مرتبه دوم در رست است.

اگر x_c نزدیک به x^* باشد مثلاً $(x_c - x^*) = 10^{-1}$ آنگاه پس از چند تکرار خطا به اندازه کافی کوچک می‌شود.

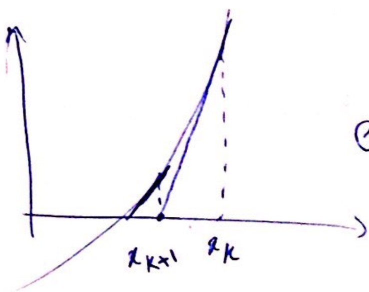
تکرار خطا در تکرار $(k+1)$ ام: $e_{k+1} \le C e_k^2$ ، $k = 4 \Rightarrow e_5 \le C e_4^2 \le C^2 e_{k-1}^4 \le \cdots \le \boxed{C^5 e_0^{32}}$

توابع به طور یکنواخت کاهشی یا افزایشی و پیوسته اگر $f(a)f(b) < 0$ آنگاه یک ریشه در $[a,b]$ موجود است.

```
m = (a+b)/2
while abs(a-b) > delta & f(m) ≠ 0
    if f(a) f(m) < 0
        b = m
    else
        a = m
    end
    m = (a+b)/2
end
```

همگرایی مجانبی خطی: $|x_k - x^*| \le C\,|x_{k-1} - x^*|$

$0 < C < 1$



روش نیوتون (کاشانی)

$$L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$L(x) = 0 \quad , \quad 0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$$x_{k+1} = x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$x = \sqrt{A}$ $\quad f(x) = x^2 - A = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - A}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + A}{2x_k}$

$$= \frac{x_k^2 + A}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right)$$

روش نیوتون مشکلاتی دارد: ۱- ممکن است تکرارها واگرا شوند.

۲- مشکل محاسباتی دارد ($f'(x_k)$ نزدیک صفر باشد)

$f(x_k)$ دور از جواب

یک راه حل: فرض کنید $x^* \in [a,b]$ ($f(a)f(b) < 0$) اگر x_{k+1} در روش نیوتون در بازه $[a,b]$ نباشد آنگاه قرار دهید $x_{k+1} = \frac{a+b}{2}$

در شروع کار، $k = 1$, $x_k = a$ یا b

تکرار k ام $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ اگر $x_{k+1} \notin [a,b]$ آنگاه $x_{k+1} = \frac{a+b}{2}$ و ...

(خطای موضعی) $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases}$ $\quad \frac{1}{2} h_{n-1}^2 \, y''(\eta_{n-1}) \; , \; \eta_{n-1} \in [t_{n-1}, t_n, \dots]$

$= O(h_n^2)$

خطای موضعی = $LTE_n = y_{n-1}(t_n) - y_n$ $\qquad$ خطای سراسری = $g_n = y_0(t_n) - y_n$

قضیه: فرض کنید $y_n(t)$ ، $n = 0, \dots, N$ جواب مسائل $y'(t) = f(t, y(t))$ ، $y(t_n) = y_n$ برازای نقاط داده شده (t_0, y_0) ، ... ، (t_N, y_N) وجود دارد، خطای سراسری به صورت $g_n = y_0(t_n) - y_n$ ، و خطای موضعی را به صورت $LTE_n = y_{n-1}(t_n) - y_n$ تعریف کنید. اگر:

$f_y = \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \le 0 \; , \; \forall t \in [t_0, t_N]$

و هیچ یک از نمودارهای $\{(t, y_n(t)) : t_0 \le t \le t_N\}$ یکدیگر را قطع نکنند، آنگاه برای $n = 1:N$ داریم

$$|g_n| \le \sum_{k=1}^{N} |LTE_k|$$

پایداری مسئله یا حالت مسئله:

یک مسئله را پایدار گویند اگر تغییرات کوچک در داده موجب تغییرات کوچک در جواب مساله شود، در غیر این صورت مساله را ناپایدار (بدحالت) گوییم.

مثال) $y'(t) = f(t,y) = a y(t) \; , \; y(0) = c \longrightarrow$ جواب تحلیلی: $y(t) = c e^{at}$

مساله تغییر یافته: $\tilde{y}'(t) = a \tilde{y}(t) \; , \; \tilde{y}(0) = \tilde{c} \Rightarrow \tilde{y}(t) = \tilde{c} e^{at} \Rightarrow |\tilde{y}(t) - y(t)| = |\tilde{c} - c| e^{at}$

با $a<0$ هرچه t بزرگتر باشد خطا کوچکتر است ⟵ مساله خوش حالت است.

مقدار h (یا تعداد بازه ها N) برای تضمین خطای سراسری برای روش اویلر: $(\le tol)$ $\qquad h = \frac{t_N - t_0}{N}$

$|LTE_n| \le \bar{M}_2 \frac{h^2}{2} \; , \; \bar{M}_2 = \max(y''(t)) \; , \; t \in [t_{n-1}, t_n]$

خطای سراسری: $|g_n| = \sum_{n=1}^{N} |LTE_n| \le \sum_{n=1}^{N} M_2 \frac{h^2}{2} \; , \; M_2 = \max(y''(t)) \; , \; t \in [t_0, t_{n+1}]$

$() = f(t,y) = a y(t) = \frac{N M_2 h^2}{2} = \frac{N h \, M_2 h}{2} \; \cancel{\quad} = \frac{(t_N - t_0)^2}{2} M_2 h \le tol$

$h \le \frac{2\,tol}{M_2 (t_N - t_0)}$ یا $\frac{t_N - t_0}{N} \le \frac{2\,tol}{M_2 (t_N - t_0)} \Rightarrow N \ge \frac{M_2 (t_N - t_0)^2}{2\,tol}$

پایداری روش: برای یک روش پایداری به تعیین اندازه h مربوط می‌شود، به مثال زیر توجه کنید:

$y'(t) = -10\, y(t)$ $\qquad$ روش اویلر: $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h(-10 y_n)$

$\longrightarrow y_{n+1} = (1-10h) y_n = \dots = (1-10h) y_1 \; \cancel{(1-10h)^n} \Rightarrow |1-10h| < 1 \longrightarrow -1 < 1-10h < 1 \quad 0 < h < \frac{1}{5}$

Scanned by CamScanner

روش های پسرو :

$$y(t_{n+1}+h_n) = y(t_{n+1}) + h_n\, y'(t_{n+1}) + O(h_n^2)$$

$t_n - t_{n+1} = h_n = -h$

روش های پسرو از روش های پیشرو پایدارترند.

$$\Rightarrow y(t_n) = y(t_{n+1}) - h\, y'(t_{n+1}) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t_{n+1})}_{\approx y_{n+1}} = \underbrace{y(t_n)}_{\approx y_n} + h f(t_{n+1}, \underbrace{y(t_{n+1})}_{\approx y_{n+1}})$$

فرمول ضمنی: $y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$

در واقع $z = y_{n+1}$ ، اسم

تابع $z = y - hf(t_{n+1}, z)$ است.

برای مثال قبلی: $y' = ay \quad , \underline{a<0}$

فرمول پسروی اویلر: $y_{n+1} = y_n + h a y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1}(1 - ah_n) = y_n \longrightarrow y_{n+1} = \dfrac{1}{1-ah_n} y_n$

بدون هیچ شرطی روی h با $n \to \infty$ جواب به صفر میل می‌کند، پس روی این مثال خاص اویلر پسرو پایدارتر از اویلر پیشرو است.

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \quad , \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه اول:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_d(t)) \\ \vdots \\ f_d(t, y_1(t), \dots, y_d(t)) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} y_1(t_0) = y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_d(t_0) = y_d^{(0)} \end{matrix}$$

روش اویلر: $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1}) \quad + h_n y'(t_{n+1}) + O(h_n^2)$

یک کاربرد: حل معادله دیفرانسیل عادی مرتبه k:

$$y^{(k)}(t) = f(t, \underbrace{y(t)}_{z_1(t)}, \underbrace{y'(t)}_{z_2(t)}, \dots, \underbrace{y^{(k-1)}(t)}_{z_k(t)})$$

شرط اولیه: $y(t_0) = y_0 \,,\, y'(t_0) = y^{(1)}(0) \,, \dots ,\, y^{(k-1)}(t_0) = y_0^{(k-1)}$

$$\begin{matrix} z_1(t) = y(t) \\ z_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ z_k(t) = y^{(k-1)}(t) \end{matrix} \longrightarrow y^{(k)}(t) = z'_k(t) \qquad \begin{cases} z'_1(t) = z_2(t) \\ z'_2(t) = z_3(t) \\ \vdots \\ z'_k(t) = y^{(k)}(t) = f(t, z_1, z_2, \dots, z_k) \end{cases}$$

$z_1(t_0) = y(t_0) = y_0$

$z_2(t_0) = y'(t_0) = y_0^{(1)}$

$\vdots$

$z_k(t_0) = y^{(k-1)}(t_0) = y^{(k-1)}(0)$

پس از حل دستگاه تخمینی برای $z_1(t_n)$ همان تخمینی برای $y(t_n)$ است.

مثال عددی) $v''(t) = 2v(t) + v'(t)\sin t \quad , \; v(0) = \alpha \;,\; v'(0) = \beta$

$z_1(t) = v(t)$

$z_2(t) = v'(t) = z'_1(t)$

$v''(t) = z'_2(t) = 2z_1 + z_2(t)\sin t$

$$\begin{cases} z'_1(t) = z_2(t) \\ z'_2(t) = 2z_1(t) + z_2(t)\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1(0) = v(0) = \alpha \\ z_2(0) = v'(0) = \beta \end{cases}$$

$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t_0) = y_0$

روش های رانگه-کاتا

در ۲ قدم:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n+h, y_n+k_1) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

y_{n+1} با روش اویلر

$$\longrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(hf(t_n,y_n)+hf(t_n+h, y_n+hf(t_n,y_n))\right)$$

واین به روش هون معروف است که خطای موضعی $O(h^3)$ دارد

و با روش سری تیلور مرتبه ۲ تطبیق دارد.

$$y(t_n+h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3)$$

— روش رانگه-کاتا مرتبه p:

با سری تیلور مرتبه p تطبیق داده می‌شود ...

$y_{n+1} = y_n + w_1k_1 + \dots + w_1k_p$, $O(h^{p+1})$ خطای موضعی , $O(h^p)$ خطای سراسری ...

در متلب: ode23, ode45

$[t, y] = ode23('f', t_i, t_{max}, y_0, tol, trace)$

(اسم تابع ، نقطه اولیه ، نقطه پایانی ، مقدار اولیه ، حداکثر خطا ، جزئیات خروجی)

روش های پیشگو-اصلاح‌گر: (آدامز-مولتون)(آدامز-باشفورث)
AB AM

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt}$$

تقریب f با درون یابی انجام می‌شود.

$y' = f(t, y(t))$

$y(t_n) = y_n$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt = y(t)\Big|_{t_n}^{t_{n+1}}$$

— روش درون یابی: k نقطه برای درون یابی

k قدم

AB: $(t_{n-k+1}, y_{n-k+1}), \dots, (t_n, y_n)$ $\quad P_{k-1}$

$\approx f_{n-k+1} \qquad \approx f_n$

AM: $(t_{n-k+2}, y_{n-k+2}), \dots, (t_{n+1}, y_{n+1})$ $\quad P_{k-1}$

خطای موضعی $O(h^{k+1})$

خطای سراسری $O(h^k)$

* فرمول ضمنی برای y_{n+1} بدست می‌آید که در آن از y_{n+1} مربوط به روش AB به عنوان پیشگو استفاده می‌کنیم.

در روش با سری تیلور مرتبه p تطبیق خواهد داشت (که این راه دیگری برای بدست آوردن فرمول ها می‌شود)

$\underline{k=1}$: AB $\rightarrow (t_n, y_n)$ $\approx f_n$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_n\,dt = y_n + f_n(\overbrace{t_{n+1}-t_n}^{h_n})$$

خطای موضعی ، خطا $= \int$ خطای درون یابی

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, n_n](t-t_n)\,dt = f'(\eta)\frac{1}{2}(t-t_n)^2\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{y''(\eta)}{2}h_n^2$$

AM $\rightarrow (t_{n+1}, y_{n+1})$, $P_0(t) = f_{n+1}$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{n+1}\,dt$$

$$= y_n + f_n + h_n + O(h^1) = y_n + f_n(\underbrace{t_{n+1}-t_n}_{h_n})$$

$$= y_n + h_n f(t_n+h_n, y_{n+1})$$

خطای موضعی $= O(h^3) = -\frac{h^2}{2} y^{(3)}(\eta), \quad \eta \in [t_n, t_{n+1}]$

$k=2$: AB $\to$ (t_{n-1}, y_{n-1}) ، (t_n, y_n) نقاط

$P_1(t) = f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(t - t_n)$

$= y_n + \frac{h_n}{2}\left(\frac{h_n + 2h_{n-1}}{h_{n-1}} f_n - \frac{h_n}{h_{n-1}} f_{n-1}\right) \qquad y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_1(t)\,dt$

$h_n = h_{n-1} = h \longrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$

خطای موضعی: $LTE_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{f[t, t_n, t_{n-1}]}_{\frac{f''(\eta_t, y(\eta_{(t)}))}{2!} = \frac{y'''(\eta_t)}{2}}(t - t_n)(t - t_{n-1})\,dt \to \frac{y'''(\eta)}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t - t_n)(t - t_{n-1})\,dt$

$= \dots = \frac{5h^3}{12} y'''(\eta_{(t)})$

$\longrightarrow$ خطای موضعی: $LTE_n = \frac{-h^3}{12} y^{(3)}(\eta)$

$\longrightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left[f_n + f(\underbrace{t_{n+1}}_{t_n + h_n}, y_{n+1})\right]$

صفحات ۳۲۸، ۳۴۴ کتاب

استفاده از فرمول ها:

predictor: $y_{n+1}^{(p)} =$ فرمول AB

corrector: $y_{n+1}^{(c)} =$ فرمول AM با y_{n+1} در طرف راست جایگزین شده با $y_{n+1}^{(p)}$

★ این فرمول می‌تواند چند بار با جایگزینی $y_{n+1}^{(p)}$ در راست با $y_{n+1}^{(c)}$ و محاسبه فرمول تکرار شود تا ⟵ (تخمین خطا $< tol$) تا وقتی رابطه برقرار نیست h کوچک شود و روش پیشگو اصلاحگر از اول شروع شود.

تخمین خطا

$y(t_{n+1}) = y_{n+1}^{(p)} + \frac{5}{12} h^3 y^{(3)}(\eta_1), \quad \eta_1 \in [t_{n-1}, t_n]$

$y(t_{n+1}) = y_{n+1}^{(c)} - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\eta_2), \quad \eta_2 \in [t_{n-1}, t_n]$

$0 \approx y_{n+1}^{(p)} - y_{n+1}^{(c)} + \frac{1}{2} h^3 y^{(3)}(\eta) \Leftarrow$ فرض می‌کنیم $y^{(3)}(\eta_1) = y^{(3)}(\eta_2) = y^{(3)}(\eta)$

$\to \frac{1}{2} h^3 y^{(3)}(\eta) \approx y_{n+1}^{(c)} - y_{n+1}^{(p)}$

$\Rightarrow$ خطای اصلاحگر $= \frac{-h^3}{12} y^{(3)}(\eta_2) \approx \frac{-1}{6}\left(y_{n+1}^{(c)} - y_{(n+1)}^{(p)}\right)$

$|$خطای موضعی اصلاحگر$| \approx \frac{1}{6}\left|y_{n+1}^{(c)} - y_{n+1}^{(p)}\right|$